



Lente-Symposium NVWF

15 juni 2012

Waterkansjes: Kenleer van het hoogst onwaarschijnlijke



Sylvia Wenmackers

Rijksuniversiteit Groningen

s.wenmackers@rug.nl

<http://www.sylviawenmackers.be>



Overzicht



Kansen & kenleer



Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- Waterkans of kansloos?



Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Overzicht



Kansen & kenleer

Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- Waterkans of kansloos?

Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Christiaan Huygens (1629–1695)

Que je ne crois pas que nous scachions rien très certainement mais tout vraisemblablement,

et qu'il y a des degrez de vraisemblance qui sont fort differents,

et quelques uns comme 100000 contre 1.



Van Rekoningel in geden van Schick.



Jakob Bernoulli (1654–1705)



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
MDCCLXIII.

Waarschijnlijkheid als graad van zekerheid; wet v/d grote aantallen



Kans en rationaliteit

Bayesianisme

Waarschijnlijkheid als rationele graad van geloof

Dit is een normatieve eis:

Men moet de axioma's van de kansrekening navolgen en nieuwe informatie in rekening brengen volgens de stelling van Bayes.

Maar wat als mensen niet aan deze eis kunnen voldoen?



Kans en rationaliteit



kleine kans

groot gevolg

Maar wat als mensen niet aan deze eis kunnen voldoen?



Overzicht

Kansen & kenleer



Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- Waterkans of kansloos?

Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Jakob Bernoulli (1654-1705)



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
MDCCLXIII.

Waarschijnlijkheid als graad van zekerheid; **wet v/d grote aantallen**



Wet van grote aantallen

Eerste versie van (zwakke) wet van grote aantallen:

Jakob Bernoulli “Ars Conjectandi” (1713)

“Gouden stelling”:

In een voldoende lange reeks van onafhankelijke proeven is er een zeer hoge kans dat de frequentie waarmee een gebeurtenis optreedt dichtbij zijn waarschijnlijkheid ligt.

Interpretatie van Bernoulli:

We kunnen de zeer hoge waarschijnlijkheid beschouwen als morele zekerheid en de frequentie van een gebeurtenis gebruiken als een schatting van de waarschijnlijkheid van die gebeurtenis.



Principe van Cournot

Antoine Augustin Cournot (1843)

- Het mag dan wiskundig mogelijk zijn dat een zware kegel rechtop blijft staan op zijn top, toch is het fysisch onmogelijk, omdat de waarschijnlijkheid van deze gebeurtenis zo klein is.
- Op de zelfde manier is het fysisch onmogelijk dat de frequentie van een gebeurtenis in een lange reeks proeven substantieel af zou wijken van de waarschijnlijkheid van die gebeurtenis.

Principe van Cournot (volgens Fréchet, 1949)

- “Een gebeurtenis met een zeer kleine kans is moreel onmogelijk; het zal niet gebeuren.”

Equivalent:

- “Een gebeurtenis met een zeer grote kans is moreel zeker; het zal gebeuren.”



Principe van Cournot

Principe van Cournot in de natuurkunde

Boltzmann (jaren 1870)

Dissipatieve processen zijn onomkeerbaar, omdat de waarschijnlijkheid van een toestand met een entropie ver van het maximum zo klein is.

Poincaré (1890)

Terugkeer-stelling

Een mechanisch systeem uiteindelijk willekeurig dicht bij zijn begintoestand terugkeert.

Hiervoor moeten er slechts 3 voorwaarden voldaan zijn:

- systeem moet volledig geïsoleerd zijn van omgeving,
- het moet beperkt zijn tot een begrensd gebied van de faseruimte
- de begintoestand zelf mag niet uitzonderlijk zijn.



Principe van Cournot

Andrej Kolmogorov (1933)

“Als $P(A)$ zeer klein is, dan kunnen we er praktisch zeker van zijn dat gebeurtenis A niet zal optreden tijdens een enkele proefneming.”

Jean Ville (1939)

“Je zal het kapitaal dat je inzet niet met een grote factor vermeerderen.”

Émile Borel “*Les probabilités et la vie*” (1943)

“Het principe dat een gebeurtenis met een zeer kleine kans niet zal gebeuren is de *enige* wet van de kans.”

Onmogelijk op de menselijke schaal: $P < 10^{-6}$

Onmogelijk op de aardse schaal : $P < 10^{-15}$

Onmogelijk op de kosmische schaal : $P < 10^{-50}$



Overzicht

Kansen & kenleer



Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- **Waterkans of kansloos?**

Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Waterkans of kansloos?

Het principe van Cournot lijkt plausibel.



Art work "Chance City" 2001 by Jean Shin

\$32,404 worth of discarded "Scratch & Win" losing lottery tickets



Waterkans of kansloos?

Toch gebeuren er voortdurend zaken waaraan we op voorhand een kleine kans hebben toegekend.



Er wint uiteindelijk altijd wel *iemand* de lotto.



Waterkans of kansloos?

Toch gebeuren er voortdurend zaken waaraan we op voorhand een kleine kans hebben toegekend.

Wet van de waterkans

(wet van Wenmackers 😊)

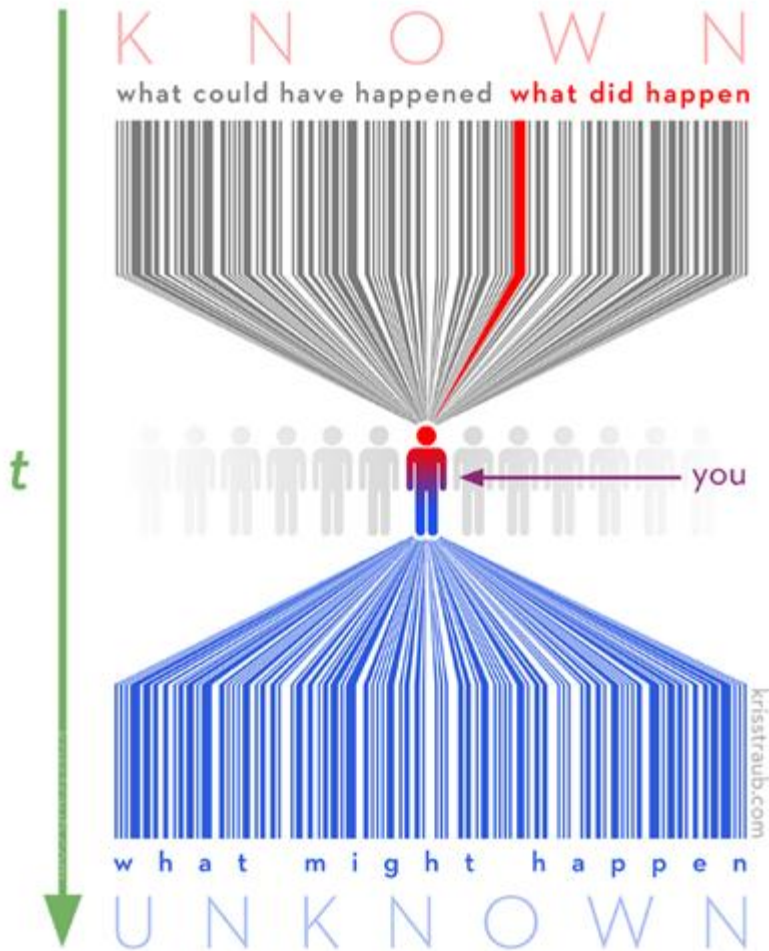
“Als elke mogelijke gebeurtenis een kleine kans heeft, moet er met zekerheid een gebeurtenis met een kleine kans gerealiseerd worden.”

De wet van de waterkans zegt dat we kunnen winnen. Enkel als we niet meedoen aan de loterij is winnen echt onmogelijk.



Waterkans of kansloos?

Toch gebeuren er voortdurend zaken waaraan we op voorhand een kleine kans hebben toegekend.





Overzicht

Kansen & kenleer

Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- Waterkans of kansloos?



Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Kans en rationaliteit

Bayesianisme

Waarschijnlijkheid als rationele graad van geloof

Dit is een normatieve eis:

Men moet de axioma's van de kansrekening navolgen en nieuwe informatie in rekening brengen volgens de stelling van Bayes.

Maar wat als mensen niet aan deze eis kunnen voldoen?



Kans en rationaliteit



kleine kans

groot gevolg

Maar wat als mensen niet aan deze eis kunnen voldoen?



Towards a psychologically plausible concept of rationality

In economics (decision&game theory)

“Bounded rationality” \Rightarrow takes into account limitations faced by actual human decision makers
Simon; Gigerenzer; Selten; ...

In logic

Agents w/o logical omniscience, dynamics, ...

In (formal) epistemology

- Emphasis on vagueness (R. Parikh, H. Gaifman)
- Bounded rationality; Matryoshka Epistemology (H. Arló Costa & A.P. Pedersen, 2011)



Bounded rationality

Rationality in economical decision theory

Traditional approach:

utility-optimization algorithms

⇒ actual agent may not be able perform the required computations.

Herbert Simon's idea in the 1950's:

bounded rationality

⇒ takes into account limitations faced by actual human decision makers:

- may not have access to all relevant info,
- have finite cognitive faculties,
- have to make their decisions in a finite amount of time.



Bounded rationality

Realistic

Idealized

**Finite cognitive
resources**

No emotions





Bounded rationality

Three key elements of bounded rationality:

- (1) search for alternatives,
- (2) aspiration adaptation,
- (3) satisficing

R. Selten “What is bounded rationality?”. In: G. Gigerenzer & R. Selten (eds.): *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox*. (2001) Berlin, Germany: MIT Press.



Bounded rationality

It has been observed that the heuristics for decision making in our ‘adaptive toolbox’ may have resulted from selection during biological and cultural evolution, because in our (past) environment constraints in time and other resources do (did) matter.

P. M. Todd “Fast and frugal heuristics for environmentally bounded minds”. In: G. Gigerenzer & R. Selten (eds.): *Bounded Rationality: The Adaptive Toolbox*. (2001) Berlin, Germany: MIT Press.



Bounded rationality

Computer simulations:

- Heuristics-based decisions do outperform optimal decision schemes in inferential speed and accuracy.
- In an ‘all things considered’ view, the heuristic approach can be regarded as more rational than a scheme which optimizes one parameter only (*i.e.* which maximizes expected utility).

G. Gigerenzer & D. G. Goldstein “Reasoning the fast and frugal way: Models of bounded rationality”, *Psychol. Rev.* 103 (1996) 650–669.



Bounded rationality

Rationality in (formal) epistemology

Traditional approach:

heavy use of classical logic and standard set theory. From this viewpoint, actual human language and reasoning (with vague words and concepts), may be considered imperfect.

Ideas similar to bounded rationality:

Parikh (1994): pragmatic approach to vague predicates and knowledge

Chopra *et al.* (2001): approximate belief revision

Arló Costa & Pedersen (2011): generalization of 'Take The Best' algorithm of Gigerenzer (2000)



Bounded rationality

Is thinking in terms of probability assignments more advanced than reasoning in terms of full beliefs?

Bayesians indeed advocate the view that rationality requires detailed probabilistic reasoning.

As soon as one incorporates the limitations of human cognitive capacities, however, the superiority of probabilistic thinking is not that clear-cut anymore.



Probability → Beliefs & Decisions

Probability → Beliefs, Decisions

Continuous

[0,1]

Discrete

{0,1}



In defense of $[0,1] \rightarrow \{0,1\}$

Assume: detailed probabilistic info is available, or at least provisionally assumed to be known.

Should we extract categorical beliefs from this & reason further in the qualitative framework?

It is rational for us to do so, because of our cognitive limitations:

“Our cognitive limitations are so severe that massive reductions to full beliefs (certainty) are indispensable if we wish to be capable of reaching conclusions and making decisions.”

S.O. Hansson “A philosophical perspective on risk” *Ambio* 28 (1999) 539–542.



In defense of $[0,1] \rightarrow \{0,1\}$

Assume: detailed probabilistic info is available, or at least provisionally assumed to be known.

Should we extract categorical beliefs from this & reason further in the qualitative framework?

Probabilistic thinking and in particular Bayesian conditionalization “cannot be applied globally by creatures with restricted computational resources”.

H. Gaifman “Reasoning with limited resources and assigning probabilities to arithmetical statements” *Synthese* 140 (2004) 97–119.



Probability → Beliefs & Decisions

Probability → Beliefs, Decisions

Continuous
[0,1]

Discrete
{0,1}

How to achieve this?

Common approach:
“Lockean Thesis”

Foley “Beliefs, degrees of belief, and the Lockean thesis”. In Huber & Schmidt-Petri (eds) “Degrees of Belief” Springer (2009) 37–47.



Probability → Beliefs & Decisions

Lockean Thesis (LT):

**It is rational to believe a statement
if the probability of that statement
is sufficiently close to unity**

Foley “Beliefs, degrees of belief, and the Lockean thesis”. In Huber & Schmidt-Petri (eds) “Degrees of Belief” Springer (2009) 37–47.



Lottery paradox

Rational all-or-nothing belief:

- based on LT,
- modelled using thresholds.

Aggregation rule:

Conjunction Principle (CP)

If it is rational to believe A
and it is rational to believe B,
then it is rational to believe (A and B).

LT + CP: paradox!



Lottery paradox

Consider a fair lottery with one million tickets, of which exactly one ticket will be drawn as the winner.

You own one ticket in this lottery.

LT: model with a threshold of say 99%

$$P(\text{losing}) = 1 - 10^{-6} = 99,9999\% > 99\%$$

⇒ It is rational to believe that your ticket will not win.

Cf., Cournot's principle!



Lottery paradox

Consider a fair lottery with one million tickets, of which exactly one ticket will be drawn as the winner.

You own one ticket in this lottery.

LT: model with a threshold of say 99%

$$P(\text{losing}) = 1 - 10^{-6} = 99,9999\% > 99\%$$

⇒ It is rational to believe of each individual ticket that it will not win.



Lottery paradox

Consider a fair lottery with one million tickets, of which exactly one ticket will be drawn as the winner.

You own one ticket in this lottery.

Aggregation rule: CP

Apply once: rational to believe that any two tickets will lose.

Apply twice, ...

It is rational to believe of the set of all tickets that they will lose. **Paradox!**



Probability → Beliefs & Decisions

Lockean Thesis (LT):

It is rational to believe a statement
if the probability of that statement
is sufficiently close to unity

Is the Lockean Thesis
psychologically plausible?



Overzicht

Kansen & kenleer

Kansen, groot & klein

- Het principe van Cournot
- Waterkans of kansloos?



Kansen & beslissingen

- Een Lockeaanse stelling
- Psychologische aspecten



Input from Psychology

Hard to isolate effect of the size of the involved probabilities from other factors
(\Rightarrow over- or underestimation of risk)

- Possible gain or loss?
- Visibility of risk?
- Fear associated with the risk?
- Perceived amount of control?

Zeckhauser & Viscusi, 2000

- Size of the expected utility?

Kahneman & Tversky, 1979

- Decision from description or experience?

Hertwig *et al.*, 2004



Input from Psychology

In the case of decisions from description, humans tend to overweight the probability of rare events;
for decisions from experience, humans tend to underweight these probabilities.

Hertwig *et al.*, 2004

For decisions from description, the subjective perception of the relevant probability depends on how the probabilistic information is presented (*e.g.* as absolute or relative probabilities).

Stone *et al.*, 1994



Fuzzy-trace theory (FTT)

FTT is a dual-process model of memory, which assumes that the mental representations of humans are of two kinds:

- verbatim (precise), and
- gist (fuzzy or vague),

but that human decision makers rely most strongly on the latter.

V.F. Reyna & C.J. Brainerd “Fuzzy-trace theory: An interim synthesis” *Learning and Individual Differences* 7 (1995) 1–75.



Fuzzy-trace theory (FTT)

Application of FTT to decisions which involve risk.

Many decisions involve a choice between alternatives with different probabilities for an undesired side-effect.

Given precise probabilistic information, people tend to remember the relative magnitudes better than the absolute values.

⇒ This demonstrates a dominance of the gist-representation over the verbatim one.

V.F. Reyna & A.J. Hamilton “The importance of memory in informed consent for surgical risk” *Med. Decis. Making* **21** (2001) 152–155.



FTT and small probability values





FTT and small probability values

Editing hypothesis:

Very small risks are edited as “**essentially nil risk**” when presented as absolute probabilities.

This editing can be **blocked** by presenting people with the same information expressed in terms of relative probabilities.

Stone, Yates, and Parker “Risk communication” *Organizational Behavior and Human Decision Processes* **60** (1994) 387–408.



Fuzzy-trace theory (FTT)

“For adults (but not necessarily for children and adolescents) the number of bullets in the chamber is irrelevant to the decision whether or not to play Russian roulette.”



V.F. Reyna “How people make decisions that involve risk: A dual-processes approach” *Curr Dir Psy Sci* **13** (2004) 60–66.



Fuzzy-trace theory (FTT)

Experimental finding: (Reyna, 2004)

The more experienced people are, the more they apply categorical short-cuts.

“According to fuzzy-trace theory, the crude all-or-nothing categorization that adults apply [...] is more advanced than the subtle shadings that adolescents perceive.”

⇒ **Lockean Thesis does seem psychologically plausible.**

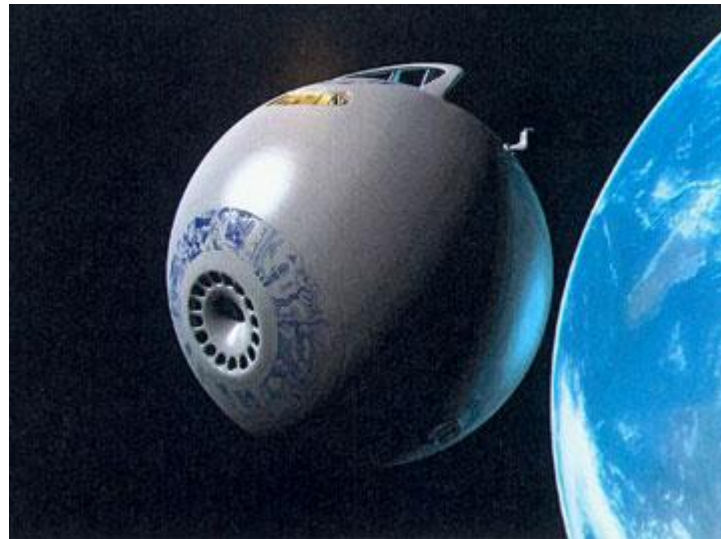
V.F. Reyna “How people make decisions that involve risk: A dual-processes approach” *Curr Dir Psy Sci* **13** (2004) 60–66.



university of
 groningen

faculty of philosophy

Bedankt voor uw aandacht!



Sylvia Wenmackers

Rijksuniversiteit Groningen

s.wenmackers@rug.nl

<http://www.sylviawenmackers.be>